

# 2016 年更生日報盃數學大賽(第 12 屆)高中三年級試題

(單選題共 25 題，每題 4 分，共計 100 分，答錯不倒扣)

※ 答案卡必須使用 2B 鉛筆畫記。

1.  $\log_{10}x + a \log_x 10 = b$ ，甲看錯  $a$ ，解得兩根為 100, 100，乙看錯  $b$ ，解得兩根為 100 及  $\sqrt{1000}$ ，若正確之解為  $\alpha, \beta$  且  $\alpha > \beta$ ， $\frac{\alpha}{\beta} = ?$

(A)100 (B) $\sqrt{1000}$  (C)200 (D)150 (E)以上皆非

解：原式  $\Rightarrow \log_{10}x + \frac{a}{\log_{10}x} = b \Rightarrow (\log_{10}x)^2 - b \times \log_{10}x + a = 0$ ，甲看錯  $a$  得二根為 100，

$100 \Rightarrow b$  正確  $\therefore \log_{10}100 + \log_{10}100 = b$ ， $\therefore 2 + 2 = b \Rightarrow b = 4$ ，

乙看錯  $b$ ，得二根為 100， $\sqrt{1000} \Rightarrow a$  正確  $\therefore \log_{10}100 \times \log_{10}\sqrt{1000} = a$ ，

$\therefore 2 \times \frac{3}{2} = a \Rightarrow a = 3$ ，即原式為  $(\log_{10}x)^2 - 4 \log_{10}x + 3 = 0$

$\Rightarrow (\log_{10}x - 1)(\log_{10}x - 3) = 0 \Rightarrow \log_{10}x = 1$  或 3，

$\therefore x = 10$  或  $1000 \Rightarrow \alpha = 1000, \beta = 10 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 100 \therefore$  選(A)

2. 從 1 至 1000 的自然數中，數字裡有 2 且有 5 的數（例：525 算一個）有  
(A)50 (B)51 (C)52 (D)53 (E)54 個

解：

①不含「0」 $\downarrow$

(A)  $\square\square \Rightarrow 2$ ， $\downarrow$

(B)  $\square\square\square \Rightarrow 7 \times 3! = 42$ ， $\downarrow$

$\uparrow 2 \ 5$

7 種 $\downarrow$

(C)  $\square\square\square \downarrow$

$2 \ 2 \ 5 \downarrow$

$\square\square\square \downarrow$

$5 \ 5 \ 2 \downarrow$

$\left. \begin{array}{l} \square\square\square \downarrow \\ 2 \ 2 \ 5 \downarrow \\ \square\square\square \downarrow \\ 5 \ 5 \ 2 \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3!}{2!} \times 2 = 6$

②含「0」 $\downarrow$

$\square\square\square\square \downarrow$

$\square\square\square\square \downarrow$

$\square\square\square\square \downarrow$

$\square\square\square\square \downarrow$

$\left. \begin{array}{l} \square\square\square\square \downarrow \\ \square\square\square\square \downarrow \\ \square\square\square\square \downarrow \\ \square\square\square\square \downarrow \end{array} \right\} 4$

由①②可得，所求為  $2 + 42 + 6 + 4 = 54$ （個） $\therefore$  選(E)

3. 甲、乙、丙、丁、戊五人由地下一樓搭電梯前往一、二、三不同的樓層，則每層樓當電梯打開時，都會有人出來的情形有

(A)150 (B)151 (C)152 (D)153 (E)154 種

解： $1 \times 3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 - 1 \times 0^5 = 150 \therefore$  選(A)

4. 下列哪一個數不可利用尺規在數線上標出其位置？

(A) $\frac{16}{19}$  (B) $\sqrt[4]{3}$  (C) $\sqrt[3]{6}$  (D) $\sqrt{\sqrt{3}+2}$  (E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

解：(A)有理數可尺規作圖

(B)偶數次偶次方根可尺規作圖  $\Rightarrow$  先作  $\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$

(C) $\therefore \sqrt[3]{6}$  不可用尺規作圖  $\Rightarrow \sqrt[3]{6}$  亦不可

(D)先作  $\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}+2 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3}+2}$

(E)可 故選 (C)

5. 設  $x, y \in \mathbf{R}$ ，且  $|x-1| \leq 2$ ， $|y+1| \leq 2$ ，若  $t = x^2 - 3y$ ，則  $t$  的範圍為

(A) $-3 \leq t \leq 18$  (B) $-2 \leq t \leq 18$  (C) $6 \leq t \leq 9$  (D) $6 \leq t \leq 10$  (E) $t$  為任意實數

解： $\therefore |x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \therefore 0 \leq x^2 \leq 9$

$\therefore |y+1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y+1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq y \leq 1$

$\therefore -9 \leq 3y \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -3y \leq 9$

故  $-3 \leq x^2 - 3y \leq 18 \therefore -3 \leq t \leq 18$ ，故選 (A)

6. 某班級有男生 18 人，女生 12 人，其中  $A$  為某男生， $B$  為某女生，今要以抽籤方式決定誰去參加數學檢定，則下列哪些情況的敘述是正確的？  
(A)如果只需抽測一位學生，則  $A$  被抽到的機率大於  $B$  被抽到的機率  
(B)如果只需抽測兩位學生，則  $A$  被抽到的機率大於  $B$  被抽到的機率  
(C)如果只需抽測兩位學生，則抽到兩位都是男生的機率大於兩位都是女生的機率  
(D)如果只需抽測兩位學生，則抽到一男一女的機率為  $\frac{72}{190}$   
(E)以上皆非

解：(A) $\times$ ； $P(A) = P(B) = \frac{1}{30}$  (B) $\times$ ； $P(A) = P(B) = \frac{C_1^{29}}{C_2^{30}} = \frac{1}{15}$

(C) $\circ$ ； $P(2 \text{ 男}) = \frac{C_2^{18}}{C_2^{30}} = \frac{18 \times 17}{30 \times 19}$

$P(2 \text{ 女}) = \frac{C_2^{12}}{C_2^{30}} = \frac{12 \times 11}{30 \times 19}$

$\therefore P(2 \text{ 男}) > P(2 \text{ 女})$

(D) $\times$ ； $P(1 \text{ 男 } 1 \text{ 女}) = \frac{C_1^{18} C_1^{12}}{C_2^{30}} = \frac{72}{145}$ ，故選 (C)

7.  $315a21$  為六位數，若分數  $\frac{315a21}{24}$  可化為有限小數，則阿拉伯數字  $a$  有幾種可能？  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解：若  $\frac{b}{a}$  為有限小數，則  $a$  只能有 2 或 5 的質因數

$$\because 24 = 3 \times 2^3 \quad \therefore \frac{315a21}{24} \text{ 為有限小數 } \Rightarrow 3 \mid 315a21$$

$\Rightarrow 3 \mid 3 + 1 + 5 + a + 2 + 1 = 12 + a \quad \therefore a$  可為 0, 3, 6, 9 共 4 個  
故選 (A)

8. 估計  $2^{\frac{3}{5}}$  最接近下列何數？ (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 1 (C)  $\frac{3}{2}$  (D) 2 (E)  $\frac{5}{2}$

解：令  $x = 2^{\frac{3}{5}}$ ,  $\therefore x^5 = 2^3 = 8$ , 設  $f(x) = x^5 - 8$ ,

$\therefore f(x) = 0$  恰有一個正實根 (另四根為共軛虛根),

$$\because f(1) = -7, f(2) = 24, \therefore f(1)f(2) < 0, \therefore 1 < 2^{\frac{3}{5}} < 2,$$

$$\text{又 } f(1.5) = 7.59375 - 8 = -0.40625, 1.5 < 2^{\frac{3}{5}} < 2 \text{ 且較接近 } \frac{3}{2} = 1.5$$

( $\because f(1.5) = -0.40625$  較  $f(2) = 24$  接近於 0), 故選 (C)

9. 設  $f(x)$  為四次的多項式，若  $f(1) = f(2) = f(3) = 5, f(4) = 11, f(5) = 77$ , 則  $f(0) =$  (A) 0 (B) -6 (C) 5 (D) 36 (E) 47

解：設  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(ax+b)+5$ ,

$$f(4) = 3 \times 2 \times 1 \times (4a+b) + 5 = 11 \Rightarrow 4a+b=1,$$

$$f(5) = 4 \times 3 \times 2 \times (5a+b) + 5 = 77 \Rightarrow 5a+b=3, \therefore a=2, b=-7,$$

$$\text{即 } f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(2x-7)+5$$

$$\Rightarrow f(0) = (-1)(-2)(-3)(-7)+5 = 47, \text{ 故選(E)}$$

10. 數列  $\{a_n\}$  中,  $S_n = \frac{3}{2}(a_n - 1)$ , 則  $a_n =$

$$(A) 3n \quad (B) 3^n \quad (C) 2n+1 \quad (D) 2^n-1 \quad (E) 2^n+1$$

解： $n=1$  時,  $S_1 = a_1, a_1 = \frac{3}{2}(a_1 - 1) \Rightarrow a_1 = 3$

$$n=2 \text{ 時, } S_2 = a_1 + a_2 = 3 + a_2, 3 + a_2 = \frac{3}{2}(a_2 - 1) \Rightarrow a_2 = 9 = 3^2$$

$$n=3 \text{ 時, } S_3 = 3 + 9 + a_3 = 12 + a_3, 12 + a_3 = \frac{3}{2}(a_3 - 1) \Rightarrow a_3 = 27 = 3^3$$

猜測  $a_n = 3^n$ , 故選 (B)

11.  $(1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \dots + x^{1000}$  展開式中,  $x^{50}$  項之係數為 (A)  $\frac{1001!}{50!951!}$  (B)  $\frac{1001!}{49!952!}$  (C)  $\frac{1000!}{50!950!}$  (D)  $\frac{1001!}{51!950!}$  (E)  $\frac{1000!}{49!951!}$

解： $(1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \dots + x^{1000}$

$$= \frac{(1+x)^{1000} [1 - (\frac{x}{1+x})^{1001}]}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{(1+x)^{1001} [1 - (\frac{x}{1+x})^{1001}]}{(1+x) - x} = (1+x)^{1001} - x^{1001}$$

$$\text{得 } x^{50} \text{ 項係數為 } C_{50}^{1001} = \frac{1001!}{50!(1001-50)!} = \frac{1001!}{50!951!}, \text{ 故選 (A)}$$

12. 設  $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{-2, -1, 1, 2\}$ , 又  $a \in A, b \in B$ , 則

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ 有實根之機率為 } (A) \frac{3}{4} \quad (B) \frac{2}{4} \quad (C) \frac{1}{4} \quad (D) \frac{1}{3} \quad (E) \frac{2}{3}$$

解： $D = a^2 - 4b \geq 0$

| a                   | b  |
|---------------------|----|
| -3, -2, -1, 1, 2, 3 | -2 |
| -3, -2, -1, 1, 2, 3 | -1 |
| -3, -2, 2, 3        | 1  |
| -3, 3               | 2  |

$$\therefore p = \frac{6+6+4+2}{6 \times 4} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}, \text{ 故選(A)}$$

13. 設  $n \in \mathbb{N}$ , 且  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2047$ , 則  $n =$

$$(A) 9 \quad (B) 10 \quad (C) 11 \quad (D) 12 \quad (E) 13$$

解： $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = \frac{1(2^{n+1}-1)}{2-1} = 2^{n+1} - 1 = 2047$

$$\Rightarrow 2^{n+1} = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n+1 = 11 \Rightarrow n = 10, \text{ 故選 (B)}$$

14. 已知  $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2$ , 則  $\tan \theta = ?$

$$(A) 1 \quad (B) 2 \quad (C) 3 \quad (D) 4 \quad (E) \text{以上皆非}$$

解： $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2 \Rightarrow \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} = 2$

$$\Rightarrow 2 \tan \theta - 2 = \tan \theta + 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 3, \text{ 故選(C)}$$

15. 所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達（進行統計分析時，所有年齡以整數表示）。下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，其中的年齡範圍有所重疊。

| 年齡範圍（歲） | 35~44 | 35~39 | 40~44 | 45~49 |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| 失業率（%）  | 12.66 | 9.80  | 13.17 | 7.08  |

請根據上表選出正確的選項？

- (A) 在上述四個年齡範圍中，以 40~44 歲的失業率為最低  
 (B) 40~44 歲勞動力人數多於 45~49 歲勞動力人數  
 (C) 40~49 歲的失業率等於  $(\frac{13.17+7.08}{2})\%$   
 (D) 35~39 歲勞動力人數少於 40~44 歲勞動力人數  
 (E) 如果 40~44 歲的失業率降低，則 45~49 歲的失業率會升高。

解：設各範圍的勞動力人數如下：

| 年齡範圍（歲）  | 35~39 | 40~44 | 45~49 |
|----------|-------|-------|-------|
| 勞動力人數（人） | $a$   | $b$   | $c$   |

- (A) 在失業率中，以 13.17% 最高  
 (B) 僅由題意，不能確定  $b > c$   
 (C) 40~49 歲的失業率為  $\frac{b \times 13.17\% + c \times 7.08\%}{b+c}$ ，不一定等於  $(\frac{13.17+7.08}{2})\%$   
 (D) 因為  $\frac{a \times 9.80\% + b \times 13.17\%}{a+b} = 12.66\%$ ，即  $9.80a + 13.17b = 12.66(a+b)$   
 $\Rightarrow 2.86a = 0.51b$ ，所以  $a < b$   
 (E) 僅由題意，不能推得此結論，故選(D)

16. 新聞快報：「本次暴風半徑高達  $x$  公里，已造成甲、乙、丙三市同時籠罩在暴風圈內」，已知甲、乙相距 250 公里，乙、丙相距 300 公里，甲、丙相距 250 公里，則  $x$  不可能為 (A) 150 (B)  $100\sqrt{3}$  (C) 300 (D) 200 (E) 250

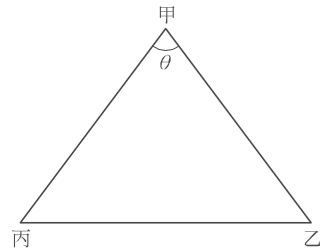
解：如右圖

令  $\overline{甲丙}$  與  $\overline{甲乙}$  之夾角  $\theta$

$$\cos \theta = \frac{250^2 + 250^2 - 300^2}{2 \times 250 \times 250} = \frac{7}{25}, \sin \theta = \frac{24}{25}$$

$$2R = \frac{300}{\frac{24}{25}} = 312.5, R = 156.25$$

只要不小於  $R$  均可，故選(A)



17.  $\sin 39^\circ \sqrt{1 - \cos^2 21^\circ} - \cos 21^\circ \sqrt{1 - \sin^2 39^\circ}$  等於

- (A) 0 (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (E)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解：所求式  $= \sin 39^\circ \sin 21^\circ - \cos 21^\circ \cos 39^\circ = -\cos (39^\circ + 21^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ ，故選(C)

18. 有關二階行列式的運算性質，下列哪個正確？

- (A)  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a+4b & b \\ c+4d & d \end{vmatrix}$  (B)  $\begin{vmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$   
 (C)  $4 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix}$  (D)  $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ 2c+3d & 4c+5d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 2a & 4c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ 3c & 5d \end{vmatrix}$   
 (E)  $\begin{vmatrix} a+3b & 2a+6b \\ 3c+4d & 6c+8d \end{vmatrix} = 0$

- 解：(A)  $\begin{vmatrix} a+4b & b \\ c+4d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4b & b \\ 4d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$   
 (B)  $\begin{vmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$   
 (C)  $\begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$   
 (D)  $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ 2c+3d & 4c+5d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c \\ 2c+3d & 4c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+b & d \\ 2c+3d & 5d \end{vmatrix}$   
 $= \begin{vmatrix} a & c \\ 2c & 4c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ 3d & 4c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ 2c & 5d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ 3d & 5d \end{vmatrix}$   
 $= 4ac - 2c^2 + 4bc - 3dc + 5ad - 2cd + 5bd - 3d^2$   
 $\neq 4ac - 2ac + 5bd - 3dc$   
 (E)  $\begin{vmatrix} a+3b & 2a+6b \\ 3c+4d & 6c+8d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & 0 \\ 3c+4d & 0 \end{vmatrix} = 0$ ，故選 (E)

19. 設  $P$  為空間中一點， $A(1, 5, -2)$ ， $B(7, -3, -4)$ ， $C(-2, 1, 3)$ ，若  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  之最小值為  $k$ ，則

- (A)  $k < 60$  (B)  $60 \leq k < 80$  (C)  $80 \leq k < 100$  (D)  $100 \leq k < 120$  (E)  $k \geq 120$

解：設  $P(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 + (x-7)^2 + (y+3)^2 + \\ &\quad (z+4)^2 + (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12x - 6y + 6z + 118 \\ &= 3(x-2)^2 + 3(y-1)^2 + 3(z+1)^2 + 100 \end{aligned}$$

$\therefore$  當  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$  時，有最小值 100，故選(D)

20. 兩圓  $C_1$  與  $C_2$ ，已知  $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ，若  $C_2$  與  $C_1$  關於直線  $3x + y = 4$  成對稱，則圓  $C_2$  方程式為

- (A)  $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 3$  (B)  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3$   
 (C)  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$  (D)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$   
 (E)  $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$

解： $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow C_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

$\because C_2$  與  $C_1$  關於直線  $3x + y = 4$  成對稱  $\therefore C_2$  之半徑與  $C_1$  之半徑相同， $C_2$  之圓心即為  $C_1$  之圓心對直線  $3x + y = 4$  的對稱點

(A)(B) 半徑不合，只需考慮 (C)(D)(E)

設選項 (C)(D)(E) 中，三圓的圓心分別為  $O_1(2, 3)$ ， $O_2(-2, 3)$ ，

$O_3(-2, -3)$ ， $C_1$  的圓心為  $O(-1, 2)$

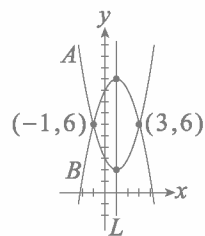
$\overline{OO_1}$ ， $\overline{OO_2}$ ， $\overline{OO_3}$  的中點分別為  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ ， $(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2})$ ， $(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2})$

其中只有  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$  在  $3x + y = 4$  上  $\Rightarrow C_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ ，故選 (C)

21. 已知坐標平面上一拋物線  $C$  之對稱軸與坐標軸平行，且  $C$  通過  $(-1, 6)$  與  $(3, 6)$  兩點，試問下列哪個敘述是正確的？

- (A)  $C$  與  $x$  軸必相交  
 (B)  $C$  與  $y$  軸必不相交  
 (C) 如果  $C$  通過  $(2, 5)$ ，則可找到實數  $r \neq 2$  而  $C$  也通過  $(r, 5)$   
 (D) 如果  $C$  通過  $(4, 8)$ ，則可找到實數  $s \neq 8$  而  $C$  也通過  $(4, s)$   
 (E) 如果  $C$  通過  $(0, 3)$ ，則  $C$  的頂點之  $y$  坐標為 3

解：拋物線  $C$  之對稱軸與坐標軸平行，且過  $(-1, 6)$ ， $(3, 6)$ ，則圖形為  $A$  或  $B$  曲線，



如圖

- (A) 圖形若為  $A$  曲線，則和  $x$  軸不相交  
 (B) 不管  $A$  或  $B$  曲線，皆和  $y$  軸相交  
 (C)  $\because$  對稱軸  $L$  平行  $y$  軸，且  $L: x = 1 \therefore (2, 5)$  的對稱點為  $(0, 5)$   
 (D)  $(4, 8)$  的對稱點為  $(-2, 8)$

(E) 設拋物線  $C: y = ax^2 + bx + c$ ，將  $(-1, 6)$ ， $(3, 6)$ ， $(0, 3)$  代入

解得  $a = 1, b = -2, c = 3 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 3$

$\Rightarrow y = (x-1)^2 + 2$ ，則頂點為  $(1, 2)$ ，故選 (C)

22. 下列何者為雙曲線？

- (A)  $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} = 3$   
 (B)  $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = 5$   
 (C)  $|\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}| = 3$   
 (D)  $|\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}| = 5$   
 (E) 以上皆非

解：(A) 因二定點  $(-1, 0)$  與  $(3, -3)$  間的距離為  $\sqrt{(-1-3)^2 + (0+3)^2} = 5 > 3$ ，故其圖形為雙曲線的一支

(B)  $\because F_1(1, -1)$ ， $F_2(-2, 3)$  且  $\overline{F_1F_2} = \sqrt{9+16} = 5$   
 $\therefore$  表一射線。

(C)  $\because F_1(1, -3)$ ， $F_2(0, 0)$  且  $\overline{F_1F_2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{10} > 3$   
 $\therefore$  表雙曲線。

(D) 因二定點  $(0, 1)$ ， $(3, -2)$  間的距離為  $\sqrt{(0-3)^2 + (1+2)^2} = 3\sqrt{2} < 5$   
 $\therefore$  沒有圖形，故選 (C)

23. 設  $x, y$  為實數，則  $\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14}$  之最小值為  
 (A) 1 (B) 3 (C)  $\sqrt{6}$  (D)  $\sqrt{14}$  (E)  $\sqrt{34}$

解： $\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14}$

$= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + 9}$

令  $A(2, -1)$ ， $B(-1, 2)$ ， $P(x, y, 0)$ ，則  $P$  在  $xy$  平面上

作  $A$  對  $xy$  平面之對稱點  $A'(2, -1, -1)$

則原式  $= \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA'} + \overline{PB} \geq \overline{A'B} = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$

$\therefore$  最小值為  $\sqrt{34}$ ，故選 (E)

24. 設  $P(1, 2, -2)$ 、 $Q(4, 3, 1)$ ，則下列何點落在  $PQ$  直線上？

- (A)  $(2, 1, -5)$  (B)  $(7, 4, 4)$  (C)  $(-5, 0, -7)$  (D)  $(1, 4, -3)$  (E)  $(3, -2, 1)$

解：過兩點  $P(1, 2, -2)$ 、 $Q(4, 3, 1)$  的直線方程式為  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{3}$ 、 $(7, 4, 4)$  滿足

上列方程式，即在此直線上，答案為 (B)

25. 若矩陣  $\begin{bmatrix} \sin \theta + \cos \theta & \sin 2\theta \\ \tan \theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & a \\ b & c \end{bmatrix}$ ,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , 則  $3a - 3b + 4c$  之值為  
(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4

解： 
$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5} \cdots \text{①} \\ \sin 2\theta = a \cdots \text{②} \\ \tan \theta = b \cdots \text{③} \\ \cos 2\theta = c \cdots \text{④} \end{cases}$$

$$\text{由①} \Rightarrow 1 + 2\sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow 2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = \frac{-24}{25} \quad \therefore a = \frac{-24}{25}$$

$$\text{又 } (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$$

$$\because 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad \therefore \sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \Rightarrow \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5} \cdots \text{⑤}$$

$$\text{由①⑤} \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{-3}{5}$$

$$\therefore b = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-4}{3}$$

$$c = \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = \frac{-7}{25}$$

$$\therefore 3a - 3b + 4c = 3 \times \left(\frac{-24}{25}\right) - 3 \times \left(\frac{-4}{3}\right) + 4 \times \frac{-7}{25} = 0, \text{ 故選(A)}$$

～ 本試題結束 ～