

2016 年更生日報盃數學大賽(第 12 屆) 高職二年級試題
(單選題共 25 題，每題 4 分，共計 100 分，答錯不倒扣)

※ 答案卡 必須使用 2B 鉛筆畫記。

1. 設 $f(x)$ 為四次的多項式，若 $f(1)=f(2)=f(3)=5, f(4)=11, f(5)=77$ ，則 $f(0)=$ (A) 0 (B) -6 (C) 5 (D) 36 (E) 47

解：設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(ax+b)+5$ ，
 $f(4)=3 \times 2 \times 1 \times (4a+b)+5=11 \Rightarrow 4a+b=1$ ，
 $f(5)=4 \times 3 \times 2 \times (5a+b)+5=77 \Rightarrow 5a+b=3, \therefore a=2, b=-7$ ，
 即 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(2x-7)+5$
 $\Rightarrow f(0)=(-1)(-2)(-3)(-7)+5=47$ ，故選(E)

2. 已知 $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 2$ ，則 $\tan\theta = ?$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 以上皆非

解： $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 2 \Rightarrow \frac{\tan\theta + 1}{\tan\theta - 1} = 2$
 $\Rightarrow 2\tan\theta - 2 = \tan\theta + 1$
 $\Rightarrow \tan\theta = 3$ ，故選(C)

3. $\angle A$ 為銳角，且 $\tan^2 A - 3\tan A - 4 = 0$ ，則 $\sin A =$
 (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{17}}$ (C) 無解 (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{17}}$

解： $\tan^2 A - 3\tan A - 4 = 0$
 $\Rightarrow (\tan A - 4)(\tan A + 1) = 0$
 $\Rightarrow \tan A = 4, \tan A = -1$ (不合)
 $\therefore \sin A = \frac{4}{\sqrt{17}}$ ，故選(B)

4. 下列何者為 1280° 的負同界角？
 (A) -160° (B) -200° (C) -20° (D) -300° (E) -60°

解： $1280^\circ \div 360^\circ = 3 \dots 200^\circ$ ， $200^\circ - 360^\circ = -160^\circ$ ，故選(A)

5. 設 $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ，且 θ 為第二象限角，下列各值何者正確？

(A) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ (B) $\tan(\pi - \theta) = \frac{3}{4}$ (C) $\sec(\pi + \theta) = \frac{5}{3}$
 (D) $\cot(\pi + \theta) = -\frac{4}{3}$ (E) $\csc(\pi - \theta) = -\frac{5}{4}$

解： $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ， θ 在第二象限 $\therefore \cos\theta = -\frac{3}{5}$

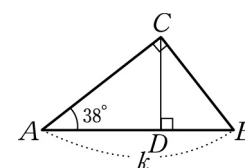
(A) $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ (B) $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta = \frac{4}{3}$
 (C) $\sec(\pi + \theta) = -\sec\theta = \frac{5}{3}$ (D) $\cot(\pi + \theta) = \cot\theta = -\frac{3}{4}$
 (E) $\csc(\pi - \theta) = \csc\theta = \frac{5}{4}$ ，故選(C)

6. $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 38^\circ$ ， \overline{CD} 垂直 \overline{AB} 於 D 。若 $\overline{AB} = k$ ，則 \overline{CD} 長為
 (A) $k \sin 38^\circ \cos 38^\circ$ (B) $k \sin 38^\circ \tan 38^\circ$ (C) $k \cdot \cos 38^\circ \tan 38^\circ$ (D) $k \sin^2 38^\circ$ (E) $k \cos^2 38^\circ$

解： $\triangle ABC$ 中， $\cos 38^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \therefore \overline{AC} = k \cos 38^\circ$

$\triangle ACD$ 中， $\sin 38^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$

$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \sin 38^\circ = k \cos 38^\circ \sin 38^\circ$ ，故選(A)



7. 求 $\cos 240^\circ \sin 150^\circ + \cos 315^\circ \sin 225^\circ$ 的值 =

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) 0 (E) 1

解：原式 $= \cos(180^\circ + 60^\circ) \sin(180^\circ - 30^\circ) + \cos(360^\circ - 45^\circ) \sin(180^\circ + 45^\circ)$
 $= -\cos 60^\circ \sin 30^\circ + \cos 45^\circ (-\sin 45^\circ)$
 $= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{3}{4}$ ，故選(C)

8. 下列各正弦函數值哪一個最大？

- (A) $\sin(-31^\circ)$ (B) $\sin 131^\circ$ (C) $\sin(-231^\circ)$ (D) $\sin 331^\circ$ (E) $\sin(-431^\circ)$

解： $\sin(-31^\circ) = -\sin 31^\circ < 0$

$$\sin 131^\circ = \sin 49^\circ$$

$$\sin(-231^\circ) = \sin 129^\circ = \sin 51^\circ$$

$$\sin 331^\circ = \sin(360^\circ - 29^\circ) = -\sin 29^\circ$$

$$\sin(-431^\circ) = \sin(360^\circ - 431^\circ) = \sin(-71^\circ) = -\sin 71^\circ$$

故 $\sin(-231^\circ)$ 最大，故選(C)

9. 二直線 $L_1: 2x + (a+3)y = 7$ ， $L_2: (a+3)x + 4(a+1)y = 5$ ，若 $a \neq -3$ ， L_1 與 L_2 垂直時， $a = ?$ (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) $-\frac{3}{2}$ (E) -4

解： $\frac{a+3}{2} \cdot \frac{4(a+1)}{a+3} = -1 \Rightarrow 2a+2 = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$ ，故選(D)

10. 下列直線，哪一條直線的斜率最小？

(A) $5x+2y=7$ (B) $y+3=0$ (C) $2x+3y=6$

(D) $3x-y=10$ (E) $x-4y=2$

解：(A) $5x+2y=7$ 之斜率 $= -\frac{5}{2}$

(B) $y+3=0$ 之斜率 $= 0$

(C) $2x+3y=6$ 之斜率 $= -\frac{2}{3}$

(D) $3x-y=10$ 之斜率 $= 3$

(E) $x-4y=2$ 之斜率 $= \frac{1}{4}$ ，故選(A)

11. 已知直線 $L_1: 3x+y-8=0$ ， $L_2: 3x-y+2=0$ ， $L_3: y-2=0$ 圍成 $\triangle ABC$ ，且 L_1 ， L_2 的交點為 A ，則 \overline{BC} 高的直線方程式為 (A) $x-3y+6=0$ (B) $x+y=0$

(C) $x+y-1=0$ (D) $x-1=0$ (E) $2x-y+3=0$

解： $\begin{cases} L_1: 3x+y-8=0 \\ L_2: 3x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1, y=5 \Rightarrow A(1, 5)$

$\therefore B, C$ 兩點在 L_3 上 $\therefore \overline{BC}$ 上的高方程式 $x=1$ ，故選(D)

12. 試判別下列各方程組，何者無解？

(A) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1 \\ 4x + 5y = 20 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 1 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

解：(A) $\begin{cases} 4x+3y=12 \\ 3x+4y=12 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{12}{7}, y=\frac{12}{7}$ ；

(B) $\begin{cases} 4x+5y=20 \\ 4x+5y=20 \end{cases}$ 有無限多組解

(C) $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{6}{5}, y=\frac{-6}{5}$ ；

(D) $\begin{cases} x = 1 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = \frac{4}{3}$

(E) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ 其圖形為兩平行直線，故無解，故選(E)

13. $\vec{a} = (6, 6)$ ， $\vec{b} = (5, 7)$ ， $\vec{c} = (2, 4)$ ，則下列選項何者代表兩向量平行？

(A) $\vec{a} - \vec{c}$ 與 \vec{b} (B) $\vec{b} + \vec{c}$ 與 \vec{a} (C) $\vec{a} + \vec{b}$ 與 \vec{c}

(D) $\vec{b} - \vec{c}$ 與 \vec{a} (E) 以上皆非

解：(A) $\vec{a} - \vec{c} = (6, 6) - (2, 4) = (4, 2)$ ， $\vec{b} = (5, 7) \therefore (\vec{a} - \vec{c}) \nparallel \vec{b}$

(B) $\vec{b} + \vec{c} = (5, 7) + (2, 4) = (7, 11)$ ， $\vec{a} = (6, 6) \therefore (\vec{b} + \vec{c}) \nparallel \vec{a}$

(C) $\vec{a} + \vec{b} = (11, 13)$ ， $\vec{c} = (2, 4) \therefore (\vec{a} + \vec{b}) \nparallel \vec{c}$

(D) $\vec{b} - \vec{c} = (3, 3)$ ， $\vec{a} = (6, 6) \therefore \vec{a} = 2(\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ ，故選(D)

14. 已知 $\triangle ABC$ 及平面上一點 P ，若 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ ，則

(A) P 在 $\triangle ABC$ 內部 (B) P 在 $\triangle ABC$ 外部 (C) P 在直線 AB 上

(D) P 在 \overline{AC} 上 (E) 以上皆非

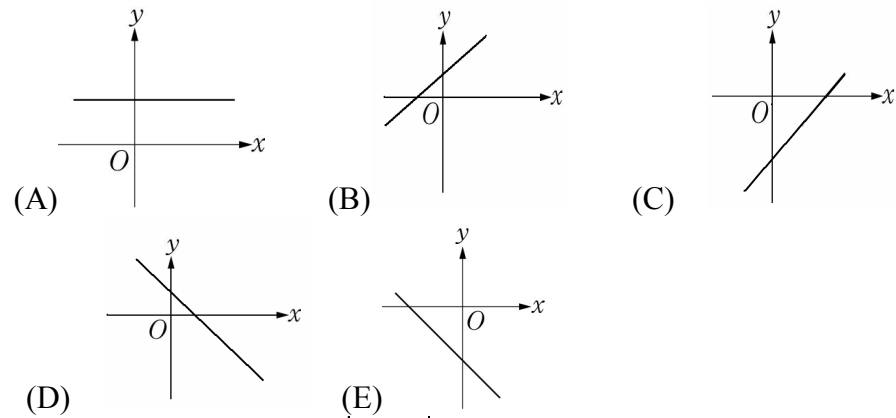
解： $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA}$$

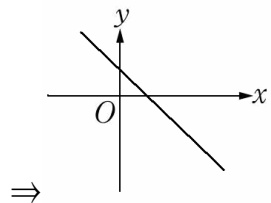
P 在 \overline{AC} 上，故選(D)

15. 若 $L: ax+by+c=0$ 且 $\frac{a}{b} > 0, \frac{c}{b} < 0$, 則 L 可能是下列何者?



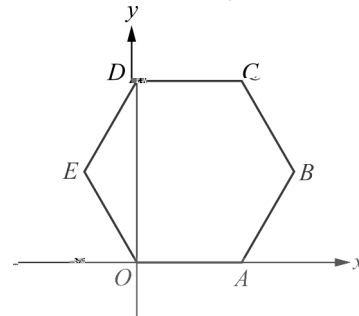
解: $L: ax+by+c=0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -\frac{c}{a} \\ \hline y & -\frac{c}{b} & 0 \end{array}$

由 $\frac{a}{b} > 0, \frac{c}{b} < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$



故選(D)

16. 如附圖, $OABCDE$ 為坐標平面上正六邊形, 其中 O 為原點, A 點坐標為 $(2, 0)$, 則向量 \overrightarrow{DE} 之坐標表法為



(A) $(1, \sqrt{3})$ (B) $(-1, -\sqrt{3})$ (C) $(\sqrt{3}, 1)$ (D) $(-\sqrt{3}, -1)$ (E) $(-1, \sqrt{3})$

解: $\overrightarrow{OE} = 2(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ) = (-1, \sqrt{3}), \overrightarrow{OD} = (0, 2\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = (-1, -\sqrt{3})$, 故選(B)

17. $\begin{cases} (m-1)x+2y=-3 \\ 3x-(n+1)y=6 \end{cases}$ 有無限多組解, 則數對 $(m, n) =$
(A) $(3, -\frac{1}{2})$ (B) $(-\frac{1}{2}, 3)$ (C) $(\frac{1}{2}, 3)$ (D) $(\frac{1}{2}, -3)$ (E) $(-\frac{1}{2}, -3)$

解: $\frac{m-1}{3} = \frac{2}{-(n+1)} = \frac{-3}{6} \Rightarrow n=3, m=-\frac{1}{2}$, 故選(B)

18. 若 $\begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 4 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{5}{y+2} = -3 \end{cases}$ 之解 $(x, y) = (\alpha, \beta)$, 則 $\alpha + \beta = ?$

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) -2

解: 令 $\frac{1}{x-1} = a, \frac{1}{y+2} = b$

$\begin{cases} a-3b=4 \\ 2a+5b=-3 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=-1 \Rightarrow x=2, y=-3 \Rightarrow \alpha+\beta=-1$, 故選(D)

19. 設 $A(-2, 1), B(5, 4)$, 點 P 在線段 AB 上且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$, 則點 P 的坐標為
(A) $(2, 3)$ (B) $(\frac{11}{5}, \frac{14}{5})$ (C) $(\frac{12}{5}, \frac{13}{5})$ (D) $(\frac{7}{3}, \frac{10}{3})$
(E) $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$

解: $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, 設 $P(x, y)$

$\Rightarrow (x+2, y-1) = \frac{3}{5}(7, 3)$

$\Rightarrow x = -2 + \frac{21}{5} = \frac{11}{5}, y = 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5}$, 故選(B)

20. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t) = -t^2 + 10t + 11$, 其中 $1 \leq t \leq 10$, 則這段時間內該地區的最大溫差為

(A) 9 (B) 16 (C) 20 (D) 25 (E) 36

解: $f(t) = -t^2 + 10t + 11 = 36 - (t-5)^2$

因 $1 \leq t \leq 10$, 故當 $t=5$ 時有最大值 36;

當 $t=10$ 時有最小值 11

\Rightarrow 該地區的最大溫差為 $36 - 11 = 25$, 故選(D)

21. 下列哪一個數最小？

- (A) $\frac{400}{511}$ (B) $\frac{622}{733}$ (C) $\frac{806}{917}$ (D) $\frac{889}{1000}$ (E) $\frac{1123}{1234}$

解： $\frac{400}{511}=1-\frac{111}{511}$ ， $\frac{622}{733}=1-\frac{111}{733}$ ， $\frac{806}{917}=1-\frac{111}{917}$ ， $\frac{889}{1000}=1-\frac{111}{1000}$ ， $\frac{1123}{1234}=1-\frac{111}{1234}$ ，因為 $\frac{111}{511}>\frac{111}{733}>\frac{111}{917}>\frac{111}{1000}>\frac{111}{1234}$ ，所以 $\frac{400}{511}<\frac{622}{733}<\frac{806}{917}<\frac{889}{1000}<\frac{1123}{1234}$ ，故選(A)

22. 在職棒比賽中 ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值。其計算方式如下：若

此投手共主投 n 局，其總責任失分為 E ，則其 ERA 值為 $\frac{E}{n} \times 9$ 。有一位投手在之前

的比賽中共主投了 90 局，且這 90 局中他的 ERA 值為 3.2。在最新的一場比賽中

此投手主投 6 局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的 ERA 值成為

- (A) 2.9 (B) 3.0 (C) 3.1 (D) 3.2 (E) 3.3

解：由題意知 ERA 的值為 $\frac{E}{n} \times 9$ ，故 $3.2 = \frac{E}{90} \times 9 \Rightarrow E = 32$ ，若這位投手再主投 6 局無失分，那麼他的 ERA 為 $\frac{32}{96} \times 9 = 3$ ，故應選(B)

23. 多項式 $f(x) = x^5 - 7x^4 - 58x^3 + 16x^2 - 460x - 250$ ，則 $f(12) =$

- (A) -135 (B) -102 (C) -10 (D) 3 (E) 13

解： $f(12)$ 為 $f(x)$ 以 $x-12$ 除之的餘式 $\Rightarrow f(12) = -10$

$$\begin{array}{r|l} 1 & -7-58+16-460-250 \\ & 12+60+24+480+240 \\ \hline & 1+5+2+40+20-10 \end{array} \quad 12$$

故選(C)

24. 設 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-2)$ 的餘式為 $2x-7$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為

- (A) $2x-7$ (B) $(x+1)(2x-7)$ (C) 2 (D) -7 (E) -3

解：由除法原理知

$$f(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + (2x-7)$$

而由餘式定理知 $f(x) \div (x-2)$ 的餘式為

$$f(2) = (2+1)(2-2)Q(2) + (2 \times 2 - 7) = -3, \text{ 故選(E)}$$

25. 已知一次函數 $f(x)$ 的圖形通過 $(4, 8)$ 與 $(3, 5)$ ，則 $f(-2)$ 等於

- (A) -10 (B) -6 (C) 0 (D) 2 (E) 5

解：一次函數的圖形表一直線 L

設 $f(-2) = k \Rightarrow$ 直線 L 通過點 $(-2, k)$

$$\text{直線 } L \text{ 的斜率} = \frac{8-5}{4-3} = \frac{5-k}{3-(-2)} \Rightarrow k = -10, \text{ 故選(A)}$$

～ 本試題結束 ～